

<sup>1</sup> D. LAL u. B. PETERS, Progress in Element, Particle and Cosmic Ray Physics **6**, 3 [1962].  
<sup>2</sup> H. MÜH, A. SITTKUS, A. ALBRECHT u. S. HARTWIG, Z. Naturforsch. **21 a**, 1123 [1966].  
<sup>3</sup> S. AEGERTER, N. BHANDARI, L. RAMA u. S. TAMHANE, Tellus **18**, 212 [1966].  
<sup>4</sup> D. P. FRIEND, HASP-Report Vol. **3** [1961].  
<sup>5</sup> L. RAMA, J. Geophys. Res. **68**, 3881 [1963].  
<sup>6</sup> A. SITTKUS, S. HARTWIG, U. FISCHER u. H. MÜH, Sonderheft MPIH-Heidelberg V **7** [1970].  
<sup>7</sup> E. O. HOLOPAINEN, Tellus **17**, 285 [1965].  
<sup>8</sup> E. PALMEN, in: Atmospheric Circulation Systems, London, New York 1967.  
<sup>9</sup> G. ASSAF, Tellus **21**, 820 [1969].  
<sup>10</sup> P. G. PRUCHNIEWICZ, Mitteil. aus dem MPI f. Aeronomie Nr. 43 [1970].  
<sup>11</sup> D. LAL u. B. PETERS, Handbuch der Physik **46,2**.  
<sup>12</sup> S. HARTWIG u. A. SITTKUS, Z. Naturforsch. **24 a**, 908 [1969].  
<sup>13</sup> F. MÖLLER, Petermanns Georg. Mitt. **95**, 5 [1951].  
<sup>14</sup> B. DAVIDSON, J. FRIEND u. H. SEITZ, Tellus **18**, 301 [1966].  
<sup>15</sup> P. H. GUDIKSEN, D. FAIRHALL u. J. REED, J. Geophys. Res. **73**, 4461 [1968].  
<sup>16</sup> W. ROEDEL, J. Geophys. Res. **75**, 3033 [1970].  
<sup>17</sup> B. BOLIN u. W. BISCHOF, Tellus **22**, 431 [1970].  
<sup>18</sup> D. H. EHHALT, J. Geophys. Res. **76**, 7351 [1971].  
<sup>19</sup> B. BOLIN, in: Kernstrahlung in der Geophysik, Springer-Verlag, Heidelberg 1962.  
<sup>20</sup> R. J. MURGATROYD, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. **95**, 40 [1969].  
<sup>21</sup> C. E. JUNGE, Air Chemistry and Radioactivity, Academic Press, New York 1963.

## Über den Fallraum in einer zylindrischen Hohlkathode

H. HELM, F. HOWORKA und M. PAHL

Institut für Atomphysik der Universität Innsbruck, Müllerstr. 23/I, A-6020 Innsbruck, Austria

(Z. Naturforsch. **27 a**, 1417—1425 [1972]; eingegangen am 11. Februar 1972)

*On the Cathode Fall in a Cylindrical Hollow Cathode*

The electric field distribution in the cathode fall and the current-voltage characteristic of a cylindrical hollow cathode are calculated on a purely radial model. The theoretical characteristic is compared with results measured on a H<sub>2</sub>- and Ar-discharge. From the experimental data, the current density ratio of electrons and ions on the cathode can be calculated. This ratio appears in the correct order of magnitude only if the carrier generation in the cathode fall is taken into account.

Comparisons are made with the results of linear theories.

### 1. Einführung

Für lineare Glimmentladungen <sup>1-3</sup> und die ebene Doppelkathodenentladung <sup>4-6</sup> bestehen Theorien und Messungen des Feldverlaufes im Kathodenfallraum sowie Vergleiche von theoretischen mit experimentellen Strom-Spannungskarakteristiken.

Im Fall einer zylindrischen Kathode sind solche Berechnungen bisher nicht angestellt worden. Vielmehr wurden Ergebnisse der linearen Theorie auf den Zylinderfall übertragen und damit weitere Abschätzungen über Hohlkathodenmechanismen gemacht <sup>7</sup>. Wegen der radialen Stromdichtekontraktion mit  $r^{-1}$  im Zylinderfall muß ein derartiger Versuch fragwürdig bleiben.

Das Fehlen von Ähnlichkeitsparametern erschwert den Vergleich von Theorie und Experiment im Fall der Hohlkathode.

### 2. Modell der Hohlkathode

Die Hohlkathode besteht aus einem zylindrischen Rohr mit dem Durchmesser  $2R$  und der Länge  $L$  (siehe

Abb. 1). Symmetrisch dazu sind zwei Anoden so angebracht, daß sich weder ein Anodenfall ausbildet, noch die Entladung behindert wird. Bei  $z=0$  betrachten wir einen Fallraumabschnitt  $dz \ll L$ , in dem wir neben der azimutalen auch axiale Homogenität voraussetzen können. Diese Annahme wird durch folgende experimen-

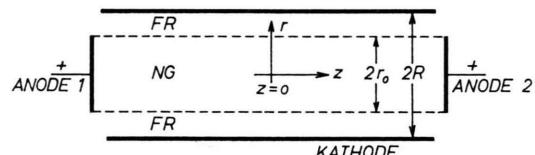


Abb. 1. Schematisches Bild der zylindrischen Hohlkathode. FR = Fallraum, NG = Negatives Glimmlicht,  $R - r_0$  = Fallraumdicke. Experimentelle  $r_0$ -Bestimmung bei  $z=0$ .

telle Befunde gestützt: der axiale Potentialgradient im negativen Glimmlicht beträgt maximal 1,5 V/cm <sup>8,20</sup>. Glimmsaum und Kathode stehen sich wie zwei Äquipotentialflächen gegenüber. Die axiale Komponente der elektrischen Feldstärke muß also verschwindend klein sein gegenüber der starken radialen Komponente. Letztere ist durch die über die Kathodenfalldicke  $R - r_0$  liegende Kathodenfallspannung  $U_c$  bestimmt ( $U_c$  liegt in der Größenordnung von einigen hundert Volt).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

### 3. Ausgangsgleichungen

Die Poisson-Gleichung

$$\operatorname{div} E(r) = \frac{e}{\epsilon_0} \{ n_+(r) - n_-(r) \} \quad (1)$$

beschreibt allgemein den Feldstärkeverlauf  $E(r)$  bei stationärer Raumladungsverteilung. Im Fallraum muß die Raumladung überwiegend positiv sein, da der Fallraum das quasineutrale Glimmlicht gegen das negative Kathodenpotential abschirmen muß. Gegenüber der Ionendichte  $n_+$  kann im Fallraum die Elektronendichte  $n_-$  wegen der ungleich höheren Elektronenbeweglichkeit vernachlässigt werden.

Mit dieser Vernachlässigung schreibt sich Gl. (1) im reinen radialen Fall:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (r E_r) = \frac{e}{\epsilon_0} n_+(r). \quad (2)$$

Die positive Raumladungsdichte lässt sich aus der positiven Stromdichte unter Zuhilfenahme einer mittleren Ionengeschwindigkeit  $\bar{v}_+$  errechnen:

$$n_+(r) = j_+(r)/e \bar{v}_+(r). \quad (3)$$

Die weitere Rechnung erfordert somit Aussagen über die radiale Abhängigkeit von  $j_+$  und  $\bar{v}_+$ .

### 4. Elementarprozesse und Randbedingungen im Fallraum

#### 4.1. Kathode

Für die Stromdichterandbedingung auf der Kathode definieren wir einen Kathodenwirkungsgrad

$$\gamma = j_1(R)/j_+(R).$$

Dabei bedeutet  $j_1$  die Elektronenstromdichte im Fallraum. Der Kathodenwirkungsgrad  $\gamma$  ist im allgemeinen größer als der Auslösekoeffizient  $\gamma_i$  für Elektronen durch Ionen.

Elektronen können nicht nur durch Ionen, sondern auch durch energiereiche Photonen und metastabile Neutrale ausgelöst werden. Thermische Emission ist wegen der geringen Kathodenerwärmung auszuschließen.

Zur genauen Berechnung von  $\gamma$  müßten bekannt sein: a) die Energieverteilung  $f(w, R)$  der primären Teilchen bzw. Quanten an der Kathode, b) der energieabhängige Auslösekoeffizient  $\gamma(w)$ . Aus diesen Größen kann mit

$$\bar{\gamma}_\nu = \int_0^{w_{\max}} \gamma_\nu(S, w) f(w, R) dw \quad (4)$$

der Anteil der Teilchensorte  $\nu$  an der Elektronenemission berechnet werden.  $S$  gibt dabei den Oberflächenzustand der Kathode an,  $w$  ist die Teilchenenergie.

Die Schwierigkeit bei einer theoretischen Berechnung von  $\gamma$  liegt nicht so sehr in der Ermittlung der Energieverteilung der Primärteilchen, diese ist in der linearen Entladung teilweise geglückt<sup>9-11</sup>, als in der genauen Kenntnis des Auslösekoeffizienten für Elektronen aus Metalloberflächen. Dieser ist zwar für sehr reine Oberflächen bekannt, hängt aber, wie Versuche von LOSCH<sup>12</sup> zeigen, sehr stark von der Oberflächenbeschaffenheit der Kathode, deren Vorbehandlung sowie von den Entladungsbedingungen ab, so daß vorerst auf eine theoretische Berechnung von  $\gamma$  verzichtet werden muß.

Über Messungen der einzelnen Beiträge  $\gamma_\nu$  ist bis jetzt nur eine Arbeit von KALKHOFF<sup>13</sup> bekannt, der in einer zylindrischen Hohlkathode den Anteil der Photoemission in einer Wasserstoff- und Sauerstoffentladung gemessen hat. Dabei fand er, daß in Wasserstoff die durch Photonen ausgelösten Sekundärelektronen maximal 5,3% des Entladungsstromes ausmachen, in Sauerstoff nur 0,34%.

#### 4.2. Elektronenbewegung und Multiplikation im Fallraum

Das stark inhomogene Fallraumfeld verhindert die Ausbildung einer stationären Elektronendrift. Nach HEISEN<sup>14</sup> bewegen sich bei einer anomalen H<sub>2</sub>-Entladung die Elektronen am Glimmsaum nicht im Gleichgewicht mit dem Feld, vielmehr hat die Mehrzahl der Elektronen dort Energien um  $e U_c$ . Wie NEU<sup>15</sup> theoretisch und KLEIN<sup>16</sup> experimentell gezeigt haben, tritt in diesem Fall die klassische Townsendsche, nur von der reduzierten Feldstärke abhängige, Ionisierung

$$a/p = f(E/p) \quad (5)$$

immer mehr zu Gunsten einer potentialabhängigen Ionisierung zurück. Messungen des Multiplikationsfaktors an der linearen Entladung<sup>16, 17</sup> ergeben gute Übereinstimmung mit theoretischen Werten, die unter Zugrundelegung der differentiellen Ionisierungsfunktion nach der Approximationsmethode (Intervalleinteilung des Fallraumes<sup>17</sup>) resultieren, während nach Gl. (5) berechnete Werte zu hoch ausfallen. Im Zylinderfall definieren wir den Multiplikationsfaktor als

$$M = r_0 j_1(r_0)/R j_1(R). \quad (5a)$$

### 4.3. Ionenbewegung im Fallraum

Die Ionenbeweglichkeit im eigenen Gas ist maßgeblich durch Resonanzumladung bestimmt. Nach WANNIER<sup>18</sup> lässt sich die mittlere Ionengeschwindigkeit für reduzierte Feldstärken  $E/p > 100 \text{ V cm}^{-1} \text{ Torr}^{-1}$  sehr gut durch die Formel

$$\bar{v}_+ = k^+ (m, \lambda_u) \sqrt{E/p} \quad (6)$$

beschreiben. Da in  $k^+$  die Ionenmasse  $m$  und die mittlere freie Umladeweglänge  $\lambda_u$  des Ions eingehen, müssen Aussagen über die betrachtete Ionenart gemacht werden. Für unsere Rechnungen verwenden wir  $k^+$ -Werte, wie sie aus Driftgeschwindigkeitsmessungen bekannt sind<sup>19</sup>.

### 4.4. Glimmsaum

Für die Stromdichterandbedingung am Glimmsaum  $r = r_0$  definieren wir einen Plasmawirkungsgrad

$$\delta = j_+ (r_0) / j_1 (r_0),$$

dessen Wert entweder aus einer Glimmlichttheorie sich ergeben muß oder bei bekannter Multiplikation  $M$  und bei bekanntem  $\gamma$  aus der Stationaritätsbedingung

$$\gamma \{ (1 + \delta) M - 1 \} = 1 \quad (7)$$

berechnet werden kann.

## 5. Feldstärkeverlauf im Fallraum

Wenn wir im Fallraum einen konstanten Umladequerschnitt voraussetzen, so können wir mit Hilfe von Gl. (6) an Stelle von Gl. (3) schreiben:

$$n_+ (r) = \frac{j_+ (r)}{e \cdot k^+} \sqrt{p/E_r}. \quad (8)$$

Zur Gewinnung der positiven Stromdichte dient ein Neuerzeugungsansatz:

$$dI_+ (r) = \alpha (r) I_1 (r) dr, \quad (9)$$

wobei  $I(r)$  den Strom durch eine Zylindermantelfläche mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $dz = 1$  bedeutet.

Der Koeffizient  $\alpha$  beschreibt die Direktionisation von Neutralgasatomen im Fallraum durch Elektronen aus der Kathode sowie durch deren im Fallraum gebildete Nachfolger. Da für jedes  $r$

$$j_1 (r) + j_+ (r) = j_E (r) \quad (10)$$

( $j_E$  = Entladungsstromdichte) erfüllt sein muß, kann man durch Integration von Gl. (9) unter Zuhilfe-

nahme von Gl. (7) und Gl. (10) die positive Stromdichte durch die Entladungsstromdichte auf der Kathode  $j_E (R)$  ausdrücken:

$$j_+ (r) = \frac{R}{r} j_E (R) \left\{ 1 - \frac{1}{1+\delta} \exp \left( \int_{r_0}^r -\alpha dr \right) \right\}.$$

Aus mathematischen Gründen müssen wir (wie auch in der linearen Theorie erforderlich) das in der Exponentialfunktion auftretende Integral durch Einführung eines Mittelwertes

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{p(R-r_0)} \int_{r_0}^R \alpha dr$$

eliminieren mit dem Ergebnis

$$j_+ (r) = \frac{R}{r} j_E (R) \left[ 1 - \frac{1}{1+\delta} \exp \{ -\bar{\alpha}(r-r_0) \} \right]. \quad (11)$$

Nach Einsetzen von Gln. (8) und (11) in Gl. (2) entsteht für den Feldstärkeverlauf eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \sqrt{r E_r} d(r E_r) &= \frac{j_E (R) \cdot \sqrt{p}}{\varepsilon_0 k^+} \\ &\cdot R \left[ 1 - \frac{1}{1+\delta} \exp \{ -\bar{\alpha}(r-r_0) \} \right] \sqrt{r} dr. \end{aligned} \quad (12)$$

Als Randbedingung bietet sich die experimentell gut erfüllte Bedingung an<sup>20</sup>

$$E_{r=r_0} = 0. \quad (13)$$

Mit Gl. (13) hat Gl. (12) die Lösung

$$E_r = \left\{ \frac{j_E (R) \cdot \sqrt{p}}{\varepsilon_0 k^+} R \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3/2} - G(\bar{\alpha}, r, r_0, \delta) \right] \right\}^{2/3}$$

worin

$$G(\bar{\alpha}, r, r_0, \delta) = \frac{3}{2(1+\delta)} \frac{e^{\bar{\alpha} r_0}}{(\bar{\alpha} r)^{3/2}} \quad (14)$$

$$\left\{ \sqrt{\bar{\alpha} r_0} e^{-\bar{\alpha} r_0} - \sqrt{\bar{\alpha} r} e^{-\bar{\alpha} r} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\text{erf} \sqrt{\bar{\alpha} r} - \text{erf} \sqrt{\bar{\alpha} r_0}) \right\}$$

Nach Normierung auf

$$U_c = - \int_{r_0}^R E_r dr \quad (15)$$

ergibt sich der von Druck und Stromstärke unabhängige „reduzierte“ Feldstärkeverlauf

$$\frac{E_r}{U_c} = \frac{[1 - (r_0/r)^{3/2} - G(\bar{\alpha}, r, r_0, \delta)]^{2/3}}{\int_{r_0}^R [1 - (r_0/r)^{3/2} - G(\bar{\alpha}, r, r_0, \delta)]^{2/3} dr}, \quad (16)$$

der in den Abb. 2 a und 2 b für verschiedene Multiplikationswerte dargestellt ist.  $M$  hängt mit  $\bar{\alpha}$  über

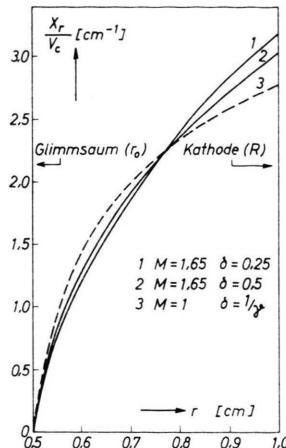


Abb. 2 a.

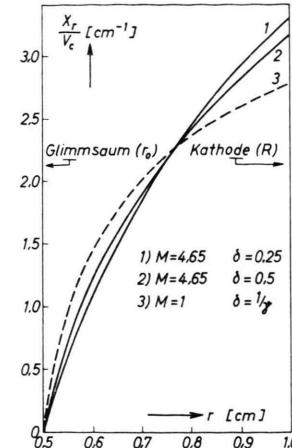


Abb. 2 b.

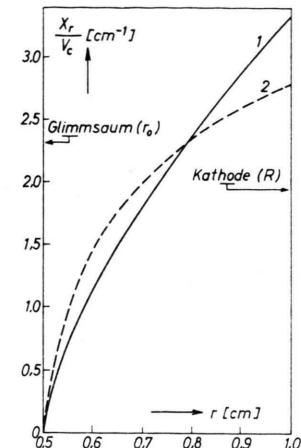


Abb. 2 c.

Abb. 2 a und 2 b. Normierter Feldstärkeverlauf im Fallraum für  $R=1$  cm,  $r_0=0,5$  cm. Kurven 1 und 2 nach Formel (16), Kurve 3 nach Formel (19).

Abb. 2 c. Vergleich der linearen Theorie von BADAREU<sup>5</sup> (Kurve 1) mit dem Ergebnis der zylindrischen Theorie [Formel (19)] für vernachlässigbare Fallraumionisierung (Kurve 2).

die Formel

$$M = \exp\{\bar{\alpha}(R - r_0)\} \quad (17)$$

zusammen. Das Integral im Nenner von Gl. (16) ist numerisch berechnet worden. Die Feldstärke vor der Kathode nimmt zu mit wachsendem Multiplikationsfaktor bzw. kleiner werdendem Plasmawirkungsgrad.

### 5.1. Feldstärkeverlauf unter Vernachlässigung der FR-Ionisierung

Ergebnisse in geschlossener Form sind nur zu erwarten, wenn die Fallraumionisierung vernachlässigt wird. Dieser Schritt ist auch in der linearen Theorie erforderlich<sup>5, 6</sup>. Er ist um so eher gerechtfertigt, je kleiner das Produkt  $p(R - r_0)$  und je höher die Kathodenfallspannung ist.

Aus Gl. (17) ergibt sich  $M = 1$ , wenn  $\bar{\alpha} = 0$ , womit aus der Stationaritätsbedingung (7) folgt:

$$\gamma \delta = 1$$

und Gl. (14) übergeht in:

$$E_r = \left[ \frac{j_E(R) V_c}{\varepsilon_0 k^+ (1+\gamma)} R \left\{ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \right\} \right]^{2/3}. \quad (18)$$

Mit der Normierung (15) lässt sich der Feldstärkeverlauf als Funktion von  $U_c$ ,  $R$  und  $r_0$  angeben:

$$\frac{E_r}{U_c} = \frac{\left[ 1 - (r_0/r)^{3/2} \right]^{2/3}}{\int_{r_0}^R \left[ 1 - (r_0/r)^{3/2} \right]^{2/3} dr}. \quad (19)$$

Dieser Verlauf ist in den Abb. 2 a und 2 b strichiert eingetragen (Kurve 3). Abbildung 2 c enthält für

einen Vergleich mit der linearen Theorie (ebenfalls ohne Berücksichtigung der Ionisierung im Fallraum) den Verlauf  $E_r/U_c$  nach Gl. (19) sowie die von BADAREU<sup>5</sup> berechnete Kurve.

Die stärkere Krümmung der Kurve (19) in Glimmsaumnähe ist durch die radiale Stromdichtekontraktion im Zylinderfall bedingt.

## 6. Potentialverlauf und Stromspannungscharakteristik

Prinzipiell lassen sich aus Gl. (14) durch Integration mit den Randbedingungen  $U(R) = 0$  der Potentialverlauf und  $U(r_0) = U_c$  die Stromspannungscharakteristik ermitteln (siehe dazu Abschnitt 7.3). Da Gl. (14) nicht geschlossen integrierbar ist, gehen wir von Gl. (18) aus und erhalten nach Integration von  $r_0$  bis  $R$  die Charakteristik für den Fall vernachlässigbarer Ionisierung im FR:

$$\frac{j_E}{p^2} = \varepsilon_0 k^+ (1+\gamma) \frac{U_c^{3/2}}{p^{2/3} F(R, r_0)^{3/2}}. \quad (20)$$

Die radiale Abhängigkeit  $F(R, r_0)$  ist dabei gegeben durch:

$$\begin{aligned} F(R, r_0) &= R^{2/3} r_0 f(R/r_0) \\ &= R^{2/3} r_0 \left[ \left\{ (R/r_0)^{3/2} - 1 \right\}^{2/3} + \ln \frac{\left[ \left\{ (R/r_0)^{3/2} - 1 \right\}^{1/3} + 1 \right]}{(R/r_0)^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{\left\{ (R/r_0)^{3/2} - 1 \right\}^{1/3}} - 1 \right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

In der linearen Theorie von BADAREU<sup>5</sup> ergibt sich mit  $d = R - r_0$  für  $F(d)$ :

$$F(d)_{\text{lin}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \frac{3}{5} d^{5/3}. \quad (22)$$

In Abb. 3 ist  $F(R, r_0)$  als Funktion der Fallraumdicke dargestellt. Parameter ist der Hohlkathodenradius  $R$  in cm.

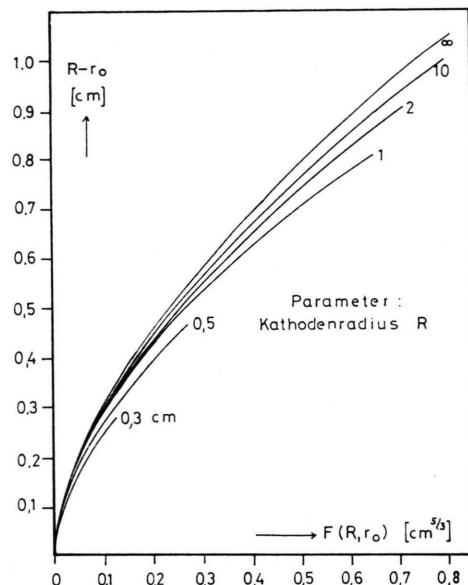


Abb. 3. Zusammenhang zwischen Fallraumdicke  $R - r_0$  und der Funktion  $F(R, r_0)$  in (21) mit dem Kathodenradius  $R$  als Parameter. Lineare Theorie für  $R = \infty$ .<sup>5</sup>

Für große  $R$  geht  $F(R, r_0)$  in die entsprechende Funktion der linearen Theorie über. Wie zu erwarten, unterscheidet sich für kleine Fallraumdicken und große HK-Durchmesser der Verlauf nur wenig von dem der linearen Theorie.

## 7. Vergleich mit dem Experiment

### 7.1. Beschreibung der Meßverfahren

Die experimentelle Bestimmung der  $r_0$ -Werte und der übrigen Entladungsparameter erfolgte an zwei Entladungsgefäß: Aluminiumkathode mit Wasserstoff und Kupferkathode mit Argon. Die Daten sind in Tab. 1 aufgeführt, die Anordnung selbst ist in Abb. 1 schematisch dargestellt. Durch einen 1 mm breiten Schlitz in der Kathodenwand in der Ebene  $z=0$  wurde der Glimmsaum ( $r=r_0$ ) beobachtet.

Die Hohlkathoden befanden sich in einem Glaszyylinder (Pyrex), durch den das Entladungsgas über ein Dosierventil und eine Kühlzelle mit 0,1 bis einigen Torr · Liter/Sekunde strömte.

Vor Beginn der Messungen wurde das Entladungsgefäß auf Drucke kleiner als  $5 \cdot 10^{-6}$  Torr evakuiert. Die Druckmessung im Entladungsraum erfolgte mit einem Kompressions- und Wärmeleitungsvakuummeter. Der Glimmlichtradius  $r_0$  wurde visuell mit einem Fernrohr mit Okularskala beobachtet (Vergrößerung 16-fach). Der Gesamtfehler der optischen  $r_0$ -Bestimmung lag bei  $\pm 0,2$  mm; die Reproduzierbarkeit war wegen des starken Helligkeitskontrastes am Glimmsaum sehr gut. Ein am System Cu-Ar vorgenommener Vergleich der visuell bestimmten  $r_0$ -Werte mit solchen, die aus dem Knick im Floating-Potentialverlauf errechnet wurden, ergab eine Übereinstimmung der Glimmsaumlage mit dem Knick innerhalb der oben angegebenen Fehlergrenze. Zur Berechnung der Stromdichte wurde eine homogene Stromdichteverteilung über die Länge der Kathode vorausgesetzt.

Der folgende Parameterumfang wurde bei den Messungen erfaßt:

	Wasserstoff	Argon
Druck	0,2 – 2 Torr	0,1 – 0,7 Torr
Entladungsstromstärke	2 – 83 mA	1 – 30 mA
Entladungsspannung	250 – 380 Volt	265 – 460 Volt

### 7.2. Vergleich mit Näherung (20), Vernachlässigung der FR-Ionisierung

In Abb. 4 ist die aus Gl. (20) folgende Charakteristik  $j_E/p^2$  gegen  $p^{5/2} F^{3/2}$  bei konstanter Kathodenfallspannung  $U_c$  eingezeichnet. Für die theoretischen

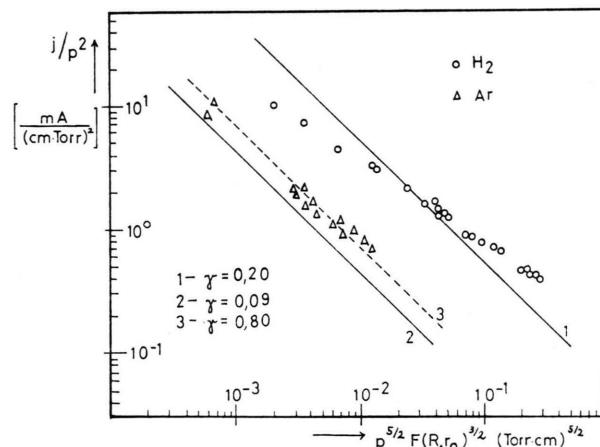


Abb. 4. Theoretische und experimentelle Charakteristik für Wasserstoff (Gerade I,  $\bigcirc$ ), sowie für Argon (Geraden II und III,  $\triangle$ ). Experimentelle und theoretische Daten dazu sind in Tab. 1 wiedergegeben.

Geraden sind dabei die in Tab. 1 angegebenen Werte der Parameter  $k^+$ ,  $\gamma$ ,  $U_c$  verwendet. Tabelle 1 enthält auch die dazugehörigen experimentellen Daten.

Tab. 1. Parameter der Hohlkathodenentladungen.

Gas	H <sub>2</sub>	Ar
Kathodenmaterial	Aluminium	Kupfer
R (cm)	2,9	1,0
L (cm)	7,2	8,0
U <sub>c</sub> (V)	300	300
k <sup>+</sup> (cm <sup>3</sup> Torr/s <sup>2</sup> V) <sup>1/2</sup>	9,5 · 10 <sup>4</sup>	8,2 · 10 <sup>3</sup>
γ	0,2 nach <sup>32</sup>	0,03 nach <sup>1</sup> 0,8
Gerade (Abb. 4)	I	II III

Die Geraden I und II weichen deutlich vom Experiment ab. Für Argon ist zwar eine Anpassung der theoretischen Kurve an das Experiment durch Wahl eines hohen γ-Koeffizienten möglich (Gerade III,  $\gamma = 0,8$ ), eine solche Vorgangsweise ist aber fragwürdig, da bisher keine Auslösekoeffizienten in derselben Größenordnung gemessen oder auf direktem Wege berechnet wurden.

ROHATGI <sup>6</sup> hat wohl seine lineare Theorie (keine Neuerzeugung im FR, Freifall der Ionen) mit einem sehr hohen γ-Wert ( $\gamma = 4$ ) an experimentelle Ergebnisse an einer Doppelkathodenentladung in N<sub>2</sub> angepaßt. Da bei Entladungsspannungen unter 0,5 kV keine Ionen für derart hohe Auslösekoeffizienten verantwortlich gemacht werden können <sup>21</sup>, sieht er dies als Beweis für die starke Beteiligung von Photonen an der Sekundäremission auf der Kathode an. Eine solche Beweisführung kann jedoch nicht stichhaltig sein. Im folgenden können wir am Beispiel des Wasserstoffs zeigen, daß der Grund für die Diskrepanz von Theorie und Experiment vor allem in der Nichtberücksichtigung der Ionisation im Fallraum zu suchen ist.

### 7.3. Berücksichtigung der Neuerzeugung im Fallraum für Wasserstoff

Aus Gl. (14) können wir mit den in Abschnitt 5.3 angegebenen Randbedingungen und aus Gl. (15) die Stromspannungscharakteristik berechnen:

$$U_c = \left[ \frac{j_E V p}{\epsilon_0 k^+ R} \right]^{2/3} \int_{r_0}^R \left\{ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3/2} - G(\bar{\alpha}, r, r_0, \delta) \right\}^{2/3} dr. \quad (23)$$

Die numerische Integration von (23) ist auf einem CDC 3300-Computer ausgeführt worden. Die Formel (23) kann – wegen der freien Parameter  $\bar{\alpha}$  und  $\delta$ , für die es keinen theoretischen Zusammenhang gibt – nicht in einem Diagramm, sondern nur mehr punktweise ausgewertet werden.

Unter Verwendung der von WUNDERER <sup>22</sup> angegebenen Multiplikationswerte (siehe Anhang bzw. Tab. 2, Spalte 6) berechnen wir nach Einsetzen der experimentell gemessenen Größen  $U_c$ ,  $j_E$  und  $r_0$  in Gl. (23) mit Gl. (7) und Gl. (17) γ-Werte, wie sie in Tab. 2, Spalte 7, eingetragen sind. Die durch Einsetzen in die Näherungsformel (20) erhaltenen γ-Werte sind in Spalte 5 eingetragen, sie liegen durchwegs zu hoch.

Tab. 2. Punktweise Auswertung der Formel (23).

1	2	3	4	5	6	7
<i>p</i> Torr	<i>p d</i> Torr · cm	$j_E/p^2$ mA	$U_c$ Volt	γ nach Gl.(20)	<i>M</i> (WUNDERER)	γ nach Gl.(23)
		$\text{cm}^2 \text{Torr}^2$				
1,0	0,85 0,665	0,164 0,439	258 295	1,34 1,73	5,6 4,0	0,185 0,275
0,8	1,1 0,62	0,086 0,687	243 340	1,71 1,92	7,5 3,65	0,16 0,315
0,7	0,728 0,525	0,224 0,897	270 340	1,4 2,0	4,58 3,0	0,18 0,33
0,6	0,810 0,465	0,153 1,22	260 360	1,00 1,32	5,2 2,6	0,14 0,34
0,4	0,56 0,32	0,344 2,75	275 380	0,66 0,75	3,2 1,95	0,13 0,255
0,35	0,39 0,25	0,85 3,39	302 359	0,65 0,69	2,25 1,65	0,155 0,215
0,29	0,32 0,20	1,3 5,22	305 360	0,57 0,51	1,95 1,5	0,145 0,175
0,22	0,25 0,168	2,17 7,60	308 361	0,36 0,36	1,68 1,4	0,09 0,12

Ein Vergleich der von uns mit Gl. (23) berechneten γ-Koeffizienten mit solchen, wie sie bisher

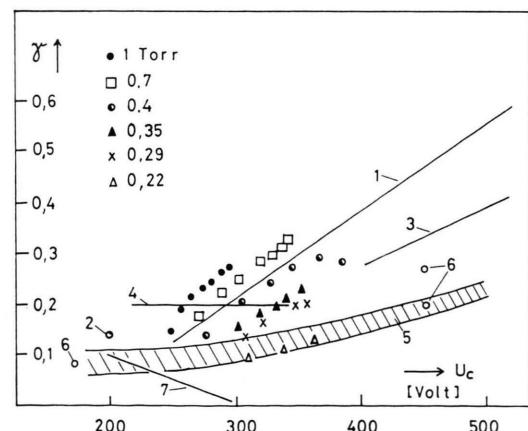


Abb. 5. γ-Werte für H<sub>2</sub> aus Formel (23), unter Berücksichtigung der Fallraumionisation berechnet. (1–7: bisher aus der Literatur bekannte γ-Werte für die Kombination H<sub>2</sub>–Aluminium.) 1) GÜNTHERSCHULZE <sup>33</sup>, 2) CAMPAN <sup>34</sup>, 3) JENTZSCH <sup>35</sup>, 4) HEISEN <sup>32</sup>, 5) WIECZOREK <sup>36</sup>, 6) NEU <sup>1</sup>, 7) WARD <sup>37</sup>.

theoretisch oder experimentell für das System Wasserstoff – ebene Aluminiumkathode bekannt sind, ist in Abb. 5 dargestellt.

Die bisher an der Glimmentladung gefundene Spannungsabhängigkeit des  $\gamma$ -Wertes ergibt sich auch bei uns. Die großenordnungsmäßige Übereinstimmung mit anderen publizierten Werten spricht für die Richtigkeit unseres, um die FR-Ionisierung erweiterten, Ansatzes.

Darüber hinaus weisen unsere auf sehr indirektem Wege bestimmten Werte von  $\gamma$  eine Zunahme mit steigendem Druck auf, die jedoch nicht mit Sicherheit als reell anzusehen ist (s. folgender Abschnitt 8).

### 8. Diskussion und Grenzen der Anwendbarkeit der Theorie

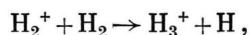
Unter Berücksichtigung der Fallraumionisation ist es möglich, die Charakteristik einer zylindrischen Hohlkathode mit  $\gamma$ -Werten zu beschreiben, wie sie bisher aus Messungen und theoretischen Berechnungen für den linearen Fall in Wasserstoff an einer ebenen Kathode vorliegen. Damit wird gezeigt, daß sehr hohe  $\gamma$ -Werte nicht reell sein können, die man erhält, wenn man eine Theorie ohne Neuerzeugung im Fallraum mit dem Experiment vergleicht.

Für Argon muß dies in noch stärkerem Maße gelten, da die differentielle Ionisierung um den Faktor 3 größer ist als in Wasserstoff<sup>23</sup>.

Bei der Anwendung der Theorie auf die Hohlkathodenentladung müssen noch drei weitere Effekte beachtet werden:

#### A. Die Ionenbeweglichkeit

Als unsicherer Faktor geht in eine Auswertung von (23)  $k^+$  aus Formel (5) ein. Massenspektrometrische Untersuchungen an einer linearen Glimmentladung von DAVIS und VANDERSLICE<sup>10</sup> ergeben, daß bei Drucken unter 1 Torr  $H_2^+$  das dominierende Ion auf der Kathode ist. Nach SAPOROSCHENKO<sup>24</sup> hängt es vom Druck und von der reduzierten Feldstärke ab, welche der Ionensorten  $H^+$ ,  $H_2^+$  oder  $H_3^+$  dominiert. Maßgebend ist hierbei die schon seit langem bekannte Reaktion<sup>25</sup>



für die bei kleinen Stoßenergien Querschnitte in der Größenordnung  $6 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$  bekannt sind<sup>26</sup> (das ist wesentlich höher als der Umladequerschnitt für

$H_2^+$  in  $H_2$ ). Besonders im negativen Glimmlicht und am Glimmsaum ist mit einem hohen Anteil von  $H_3^+$ -Ionen zu rechnen, da  $H_2^+$ -Ionen, die dort durch Direktionisation entstehen, auf einer freien Weglänge nur geringe Energiebeträge aufnehmen.  $H_3^+$ -Ionen unterliegen ferner bei ihrer Bewegung durch  $H_2$  dem Umladungsprozeß



bei dem ein Proton ausgetauscht wird, und der einen Querschnitt in der Größenordnung  $10^{-14} \text{ cm}^2$  hat<sup>26</sup>.

Die Energieverteilungen der drei Ionenarten  $H^+$ ,  $H_2^+$  und  $H_3^+$  auf der Kathode sind wegen der unterschiedlichen Prozesse, die diese Ionen im Fallraum erleiden, verschieden, zu jeder Ionensorte gehört also ein spezifisches  $\gamma_i$ . Eine druckabhängige Veränderung der Ionenanteile kann demnach direkt das Stromdichteverhältnis auf der Kathode beeinflussen. Wichtiger erscheint jedoch die Auswirkung auf den Faktor  $k^+$ , der für die drei Ionen  $H^+$ ,  $H_2^+$  und  $H_3^+$  stark verschieden ist<sup>27</sup>. Aus diesem Grunde dürfte die von uns mit Hilfe von Gl. (23) unter Annahme eines konstanten Wertes  $k^+$  ermittelte Druckabhängigkeit des  $\gamma$ -Koeffizienten nicht reell sein.

#### B. Pendelelektronen

Bei Hohlkathodenentladungen mit kleinem  $2Rp$  ist zu berücksichtigen, daß die schnellen Fallraum-elektronen das – praktisch feldfreie – NG durchfliegen und nach wenigen inelastischen Stößen wiederum in den gegenüberliegenden Fallraum eindringen können. Nach GÜNTHERSCHULZE<sup>28</sup> wird durch solche „Pendelelektronen“ die Ionisierung und Anregung im Fallraum, d. h. der Wert des Multiplikationsfaktors  $M$  erhöht. Wie sich eine solche Erhöhung von  $M$  im Rahmen dieser Theorie auf die Stromspannungscharakteristik auswirkt, wird in einer eigenen Arbeit<sup>29</sup> abgeschätzt. Dort wird auch der experimentelle Nachweis von Pendelelektronen erbracht.

Ein weiterer Einfluß der Pendelelektronen auf die Strom-Spannungscharakteristik kann in folgendem bestehen: Nach Durchlaufen des NG treten diese Elektronen wieder in den Fallraum ein, wobei sich ihre radiale Geschwindigkeitskomponente durch das entgegengesetzt gerichtete Feld und durch Stöße stetig verringert. Ein Teil der Elektronen, der die Kathode nicht mehr erreicht, dreht um und wird wieder auf das NG zurück beschleunigt. Beim Auftreten von Pendelelektronen könnte also der Feldverlauf

vor der Kathode durch eine *negative* Raumladungsschicht wesentlich mitbestimmt sein.

*C. Nichtlineare Prozesse zur Trägerneubildung im Fallraum und die Erhöhung der Sekundäremission an der Kathode durch metastabile Teilchen*

Diese Theorie enthält den  $\alpha$ -Prozeß als einzigen Neuerzeugungsmechanismus im Fallraum. Bei den geringen Kathodenfallspannungen in der Hohlkathode ist das Mitwirken von  $\beta$ -Prozessen (ionisierende Stöße von Ionen) auszuschließen. Die Neuerzeugung von Ladungsträgern kann jedoch auch als Stufenprozeß über angeregte Teilchen erfolgen. Pendelelektronen durchlaufen im Fallraum im allgemeinen zweimal das Ionisierungs- und Anregungsmaximum. Aus diesem Grunde ist – im Gegensatz zur linearen Entladung – mit einem erhöhten Anteil von metastabilen Teilchen im Fallraum der Hohlkathode zu rechnen. Die Vernichtung der metastabilen Teilchen im Gasraum führt meist zur Bildung von Ladungsträgern, die Vernichtung an der Kathodenwand zur Emission eines Sekundärelektrons. In einer Argon-Hohlkathodenentladung wurde von uns gemessen, daß von der gesamten Sekundärelektronenausbeute an der Kathode bis zu 5% von schnellen Neutralen (Energien kleiner als 500 eV) herührt<sup>30</sup>.

Die Verfasser danken Herrn Professor Dr. R. N. VARNEY für zahlreiche fördernde Diskussionen.

### Anhang

WUNDERER<sup>22</sup> hat die  $M$ -Werte nach dem in Abschnitt 4 b angegebenen Verfahren berechnet und

gegenüber der schon von FRANCK<sup>31</sup> verwendeten Methode einige Verbesserungen eingeführt.

Der durch  $p d$  und  $U_c$  charakterisierte Fallraum wird in Teilintervalle der halben Ionisierungsenergie von  $H_2$  (7,7 V) eingeteilt, bei der Summation werden 10 Elektronengenerationen berücksichtigt. Vernachlässigt werden die Energieverluste der Elektronen bei inelastischen Stößen sowie die Anfangsenergien der neuerzeugten Elektronen. Der Potentialverlauf wird parabolisch angenommen.

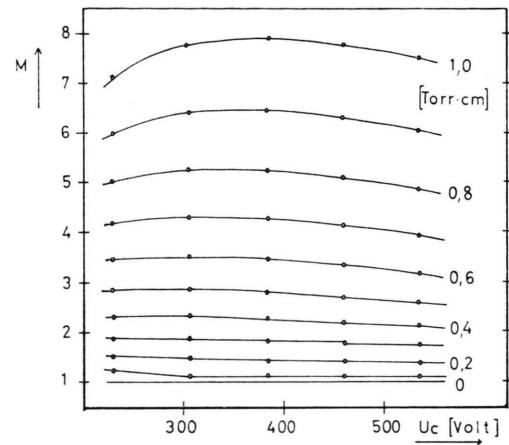


Abb. 6. Theoretische Multiplikationswerte als Funktion der Kathodenfallspannung  $U_c$  für  $H_2$  nach WUNDERER<sup>22</sup>. Parameter ist die reduzierte Fallraumdicke  $p (R - r_0)$ .

Die von Wunderer so erhaltenen Multiplikationswerte sind in Abb. 6 wiedergegeben.

Für die Bereitstellung dieser bisher unveröffentlichten Werte danken die Verfasser Herrn Dipl.-Phys. BERND WUNDERER (Universität München).

- <sup>1</sup> H. NEU, Z. Physik **154**, 423 [1959]; **155**, 77 [1959].
- <sup>2</sup> E. HANTZSCHE, Beitr. Plasmaphys. **1**, 179, 203 [1961]; **4**, 165 [1964].
- <sup>3</sup> A. HEISEN, Habilitationsschrift München 1969, p. 24.
- <sup>4</sup> P. F. LITTLE u. A. VON ENGEL, Proc. Roy. Soc. London A **224**, 209 [1964].
- <sup>5</sup> E. BADAREU, Ann. Phys. **5**, 308 [1960].
- <sup>6</sup> V. K. ROHATGI, J. Appl. Phys. **32**, 1173 [1961].
- <sup>7</sup> H. FALK, Ann. Phys. (7) **16**, 160 [1965].
- <sup>8</sup> M. PAHL, W. LINDINGER u. F. HOWORKA, Z. Naturforsch. **27 a**, 678 [1972].
- <sup>9</sup> G. W. McCCLURE u. K. D. GRANZOW, Phys. Rev. **125**, 3 [1962].
- <sup>10</sup> W. D. DAVIS u. T. A. VANDERSLICE, Phys. Rev. **131**, 219 [1963].
- <sup>11</sup> E. HANTZSCHE, Beitr. Plasmaphys. **6**, 331 [1966].
- <sup>12</sup> W. LOSCH, Diplomarbeit, München 1964, siehe<sup>3</sup>, p. 17.
- <sup>13</sup> W. KALKHOFF, Diplomarbeit, München 1964, siehe<sup>3</sup>, p. 33.
- <sup>14</sup> A. HEISEN u. H. WELLENHOFER, Ann. Phys. (7) **12**, 275 [1963].
- <sup>15</sup> H. NEU, Z. Physik **152**, 294 [1958].
- <sup>16</sup> W. KLEIN, Wiss. Zeitschr. TH Ilmenau 1968, 127, 277.
- <sup>17</sup> Siehe<sup>3</sup>, p. 27–30.
- <sup>18</sup> G. H. WANNIER, Phys. Rev. **83**, 281 [1951].
- <sup>19</sup> E. W. McDANIEL, Collision Phenomena in Ionized Gases, John Wiley, New York 1964.
- <sup>20</sup> F. HOWORKA u. M. PAHL, Z. Naturforsch. **27 a**, 1425 [1972].
- <sup>21</sup> W. PLOCH, Z. Physik **130**, 174 [1951].
- <sup>22</sup> B. WUNDERER, private Mitteilung.
- <sup>23</sup> M. ARDENNE, Tabellen zur Angewandten Physik, Bd. I, VEB Dt. Verl. Wiss. Berlin 1962, S. 589.
- <sup>24</sup> M. SAPOROSCHENKO, J. Chem. Phys. (USA) **42**, 2760 [1965].
- <sup>25</sup> M. PAHL, Erg. Exakt. Naturwiss. **34** [1962]. Neue Ergebnisse über Sekundärprozesse langsamer Ionen, p. 132.
- <sup>26</sup> R. N. VARNEY, Phys. Rev. Letters **12**, 559 [1960].

<sup>27</sup> M. SAPOROSCHENKO, Phys. Rev. **139**, A 349 [1965].  
<sup>28</sup> A. GÜNTHERSCHULZE, Z. Physik **19**, 313 [1923].  
<sup>29</sup> H. HELM, in Vorbereitung.  
<sup>30</sup> H. HELM, in Vorbereitung.  
<sup>31</sup> G. FRANCK, Ann. Phys. **7**, 323 [1967].  
<sup>32</sup> Siehe <sup>3</sup>, Tabelle II.  
<sup>33</sup> A. GÜNTHERSCHULZE, Z. Physik **109**, 121 [1938].

<sup>34</sup> T. CAMPAN, Z. Physik **91**, 111 [1934].  
<sup>35</sup> U. JENTZSCH, Diplomarbeit, Universität München 1964, siehe <sup>3</sup>, Abb. 9.  
<sup>36</sup> L. W. WIECZOREK u. E. HANTZSCHE, Beitr. Plasmaphys. **5**, 255 [1965].  
<sup>37</sup> A. L. WARD, J. Appl. Phys. **33**, 2789 [1962].

## Experimentelle Bestimmung innerer und äußerer Parameter des negativen Glimmlichtplasmas einer zylindrischen Hohlkathodenentladung in Argon \*

F. HOWORKA und M. PAHL

Institut für Atomphysik der Universität Innsbruck, Austria

(Z. Naturforsch. **27 a**, 1425—1433 [1972]; eingegangen am 8. Mai 1972)

*Plasma Diagnostic Measurements in the Negative Glow of a Cylindrical Hollow Cathode Discharge*

The negative glow plasma of a cylindrical hollow cathode dc discharge (0.05—1 Torr Argon, 1—30 mA) is investigated as to the position of the glow edge, the axial dependence of the cathode current density, the axial and radial potential distributions, the density and energy of electrons (from Langmuir probe measurements) as dependent on pressure, discharge current and position, etc. It is found that two groups of electrons exist whose energies are < 0.5 eV and  $\sim$  3 eV and the ratio of their densities being 3 up to 20. A phenomenological explanation is given for the relatively high density of the fast group. The results are compared with those of other authors concerning hollow-cathode and linear discharges.

### Einleitung

Die als „Hohlkathodenentladung“ bekannte Erscheinungsform der Niederdruckgasentladung hat seit ihrer Beschreibung durch PASCHEN<sup>1</sup> und GÜNTHERSCHULZE<sup>2</sup> großes Interesse hervorgerufen. Besonders intensiv wurde sie in der Spektroskopie verwendet, da diese Entladungsform die Beobachtung höherer Energieniveaus erlaubt<sup>1, 3</sup>. Umfassende Untersuchungen der Strom-Spannungs-Charakteristik, der radialen Intensitätsverteilung von Entladungslinien und der achsialen Stromdichtevertteilung zusammen mit theoretischen Ansätzen sind in<sup>4—6</sup> beschrieben. Die meisten dieser früheren Arbeiten hatten die Bestimmung äußerer Parameter zum Ziele (Strom-Spannungs-Charakteristik, Lichtintensität, Aussehen des negativen Glimmlichtes (NG) etc.).

In der linearen Entladung sind in jüngster Zeit große Fortschritte bei der Bestimmung von Kenngrößen des NG erzielt worden<sup>7, 8</sup>. Auch die gemeinsame theoretische Behandlung des Fallraums und des NG in zweidimensionaler Rechnung ( $r, z$ )<sup>9—11</sup> ist zusammen mit der experimentellen Bestimmung der zugehörigen inneren Parameter (Potential- und Feldstärkenverlauf, Dichtevertteilung, Elektronen-

gruppen, Energieverteilung etc.) mit Erfolg gelungen. Außerdem ergaben massenspektrometrische Untersuchungen am Plasma der positiven Säule<sup>12, 13</sup> und am negativen Glimmlicht<sup>14</sup> Aufschluß über die Zusammensetzung der Entladungseionen, wobei auch die Entdeckung einiger bis dahin unbekannter Molekül-Ionen gelang<sup>15</sup>.

Vom negativen Glimmlicht der Hohlkathodenentladung war bisher weder in theoretischer Hinsicht (außer einigen Ansätzen in ebener Doppelkathodengeometrie<sup>16, 17</sup> und vor allem<sup>18</sup>) noch experimentell ein entsprechender Überblick vorhanden. Einzelne Bestimmungen innerer Parameter an Hohlkathoden liegen zwar vor<sup>19—25</sup>, eine zusammenfassende Darstellung fehlt jedoch noch. Die hier mitgeteilten Ergebnisse sollen einerseits zur Erklärung des Mechanismus der Niederdruck-Hohlkathodenentladung beitragen, andererseits stehen sie in engem Zusammenhang mit eigenen massenspektrometrischen Untersuchungen am NG der ZHK<sup>26, 27</sup>, bei denen die einzelnen Elementarprozesse für die Bildung, Umwandlung und Vernichtung verschiedener Ionen im stationären NG-Plasma ermittelt und Zahlenwerte für die Reaktionskonstanten solcher Prozesse gewonnen werden<sup>28, 29</sup>.

\* Auszugsweise vorgetragen auf der Jahrestagung der Österr. Physikalischen Gesellschaft, Leoben, 4.—7. Oktober 1971.